ある種の$t-(2k,k,\lambda)$ Designについて (デザインの構成と解析)

野田, 隆三郎

数理解析研究所講究録
311巻 1977年 37-39

ある種の t-$(2k, k, \lambda)$ design について

阪大 教養　野田隆三郎

$v=2k$ であるような t-design つまり t-$(2k, k, \lambda)$ design について考える．ここでは次の仮定をおく．

(1) 任意の block A に対し A の補集合も block をなす

この時 次が知られている．

定理 (Alltop [1])．t が偶数，$k>t$ であれば上の(1)をみたす t-$(2k, k, \lambda)$ design は $(t+1)$-design である．

t-$(2k, k, \lambda)$ design の中で無限 series として存在の知られているのはただ一つ Hadmard 3-design，つまり 3-$(2k, k, \frac{1}{2}(k-2))$ design だけである．Hadmard 3-design は t-$(2k, k, \lambda)$ design の中で上の性質(1)と次の性質で特徴づけられる

(*) 任意の complementary な block の pair A, B に対し $|C \cap A| = |C \cap B|$ が他の任意の block C に対してなりたつ

ここでは (*) の代りに次の条件 (2) (or (3)) を考える.

(2) 任意の complementary な block の pair A, B に対し $|C \cap A| = |C \cap B| \pm u$ $(u>0)$ が他の任意の block C に対してなりたつ

(3) 任意の complementary な block の pair A, B に対し $|C \cap A| = |C \cap B|$ または $|C \cap A| = |C \cap B| \pm u$ が他の任意の block C に対してなりたつ.

この時 次の定理がなりたつ

定理1 ([2]) t-$(2k, k, \lambda)$ design $(t \geqq 2)$ が上の (1), (2) をみたせば $t \leqq 3$ で parameter は次のように書かれる:
$k = u(2u+1)$, $\lambda_3 = u(2u^2+u-2)$.

定理2 ([2]). t-$(2k, k, \lambda)$ design が上の (1) (3) をみたせば $t \leqq 5$ で もし $t \geqq 4$ とすれば 次のいずれかがなりたつ.

(i) $5-(12, 6, 1)$ design

(ii) $5-\left(\frac{2}{3}u(2u+1), \frac{1}{3}u(2u+1), \frac{1}{54}u(2u^2+u-9)(2u^2+u-12)\right)$ design

(iii) $5-\left(2u^2, u^2, \frac{1}{4}(u^2-3)(u^2-4)\right)$ design

定理1で存在が知られているのは自明な $3-(6, 3, 1)$ design だけである．また定理2で存在が知られているのは $5-(12, 6, 1)$ design, $5-(24, 12, 48)$ design (~~typ~~ type (iii)) それに自明な $4-(8, 4, 1)$ design (type (iii)) だけである．定理1, 2の証明は文献[2]を参照されたい。

文　献

1. W. O. Alltop, Extending t-designs, J. Combinatorial Theory A 18 (1975), 177–186
2. R. Noda, On some $t-(2k, k, \lambda)$ designs, to appear in J. Combinatorial Theory A.